УДК 519.654 Математика

Точная по порядку оценка норм операторов ортогонального проектирования на пространства непрерывных сплайнов[1]

А. Р. Каюмов

Обозначения и постановка задачи

Введем следующие обозначения. Зафиксируем число k и отрезок $[a,b]$. Обозначим $\Delta_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ – разбиение отрезка $[a,b]$, $\mathbb{P}_k$ – пространство полиномов степени не выше k. В этих обозначениях пространство

$$\mathbb{S}_{k,m}(\Delta_n) = \left\{ s \in C^{k-m}[a,b] : s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_k, i = 0,\ldots,n-1 \right\}$$

называется *пространством полиномиальных сплайнов степени k дефекта m на разбиении* Δ_n (здесь m может меняться от 1 до k+1). В случае $m=k+1$ (*сплайны максимального дефекта*) на сплайн не накладывается никаких условий непрерывности в узлах сетки, такой сплайн является полностью локальным. В случае $m=k$ (*непрерывные сплайны*, или *C-сплайны*) на сплайн накладывается условие непрерывности в узлах сетки. В случае m=1 (*сплайны минимального дефекта*) на сплайн накладывается условие непрерывности самого сплайна и его первых k-1 производных в узлах сетки, и лишь последняя, k-я производная может иметь в них разрывы.

Рассмотрим оператор $P_{\mathbb{S}}$ ортогонального (относительно скалярного произведения в пространстве $L_2[a,b]$) проектирования пространства $C[a,b]$ на подпространство $\mathbb{S}_{k,m}(\Delta_n)$:

$$P_{\mathbb{S}} : C[a,b] \ni f \mapsto P_{\mathbb{S}} f \in \mathbb{S}_{k,m}(\Delta_n)$$

где $P_{\mathbb{S}} f$ однозначно определяется любым из следующих двух эквивалентных условий:

1. $\langle f,s \rangle = \langle P_{\mathbb{S}} f,s \rangle$ для всех $s \in \mathbb{S}_{k,m}(\Delta_n)$,
2. $\|f - P_{\mathbb{S}} f\|_2 = \min\limits_{s\in\mathbb{S}_{k,m}(\Delta_n)} \|f - s\|_2$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00949), программы Государственной поддержки “Ведущие научные школы” (проект НШ-5120.2006.1) и INTAS (грант Young Scientist Fellowship, номер 04-84-2601).

Рассмотрим норму оператора $P_{\mathbb{S}}$ как оператора из $C[a,b]$ в $C[a,b]$. Достаточно легко проверить, что если разбиение Δ_n фиксировано, то оператор $P_{\mathbb{S}}$ является ограниченным. Естественно поставить следующий общий вопрос: является ли семейство операторов проектирования $P_{\mathbb{S}}$ ограниченным *равномерно по всевозможным разбиениям* Δ_n *отрезка* [a,b]?

Обозначим

$$c_{k,m} = \sup_{\Delta_n, n} \left\| P_{\mathbb{S}_{k,m}(\Delta_n)} \right\|_\infty$$

Величины $c_{k,m}$ часто называются *константами Лебега*. Общая задача состоит в следующем: требуется изучить вопрос о конечности этих величин и (в случае конечности) об их вычислении при различных $k \geq 1$, $1 \leq m \leq k$. (Случай $m=k+1$ не относится к собственно теории сплайнов.) В данной работе рассматривается задача оценки констант Лебега непрерывных сплайнов, то есть величин $c_{k,k}$, при $k \geq 2$.

История задачи

Гипотеза о том, что $c_{k,1} < \infty$ при всех $k \geq 1$, была впервые сформулирована Карлом де Бором в [2], поэтому вопрос о справедливости этой гипотезы носит (точнее, до недавнего времени носил) название *проблемы де Бора*. (Заметим, что сплайны больших дефектов можно получить предельным переходом из сплайнов минимального дефекта и что при помощи указанного перехода легко получить неравенство $c_{k,m} \leq c_{k,1}$.) В следующей таблице приведена история исследования проблемы де Бора для сплайнов минимального дефекта.

Сплайны	Автор	Год	Результат
$k=1$ (линейные)	З. Чисельский [5]	1963	$c_{1,1} \leq 3$
$k=1$ (линейные)	З. Чисельский [6]	1975	Вопрос: верно ли $c_{1,1}=3$?
$k=1$ (линейные)	К.И. Осколков [7] и П. Освальд [11] (независимо)	1977	$c_{1,1}=3$
$k=2$ (параболические)	К. де Бор [1]	1968	$c_{2,1} \leq 30$
$k=3$ (кубические)	К. де Бор [4]	1979	$c_{3,1} \leq 245/3$
любые k	А.Ю. Шадрин [9]	2001	$c_{k,1} < \infty$ $c_{k,1} \geq 2k+1$ Гипотеза: $c_{k,1}=2k+1$.

В литературе также рассматривался оператор проектирования на пространства сплайнов дефекта, большего единицы.

1. Де Бор в 1976 году в [3] доказал $c_{k,k} < \infty$. Как отмечено в [9], из результатов [3] можно вывести оценку $c_{k,k} \leq 4^k / \sqrt{k}$.

2. Из результатов Н.Л. Зматракова и Ю.Н. Субботина 1983-го года, содержащихся в [10], также следует, что $c_{k,k} < \infty$.

3. А.Ю. Шадрин в 1998 году в [8] доказал, что $c_{k,m} < \infty$ при $k \geq 5$, $m=k-1$ и $k \geq 10$, $m=k-2$, а также при $k=17,18$, $m=k-3$ и $k=26,27$, $m=k-4$.

Однако конструктивных оценок сверху для $c_{k,m}$, отличных от очевидных оценок $c_{2,2} \leq c_{2,1} \leq 30$ и $c_{3,3} \leq c_{3,1} \leq 245/3$, получено не было.

Резюмируя сказанное, отметим, что к настоящему моменту доказана конечность констант Лебега $c_{k,m}$ при всех $k \geq 1$ и $1 \leq m \leq k+1$, но конструктивные оценки сверху получены лишь при $k=1,2,3$. Поэтому на сегодняшний день стоит задача получения оценок сверху для величин $c_{k,m}$ при различных k и m.

Значение задачи

Данная задача интересна с нескольких точек зрения.

1. Исследование норм операторов ортогонального проектирования на различные приближающие пространства (констант Лебега) является классической задачей теории приближения. Поведение констант Лебега достаточно полно изучено в случае проектирования с различными весами на подпространства алгебраических и тригонометрических полиномов. Как отмечалось выше, в теории сплайнов в этом направлении остается еще много нерешенных проблем.

2. Оператор ортогонального проектирования на пространство сплайнов степени k тесно связан с оператором интерполирования сплайнами степени $2k+1$. Фактически, изучение оператора ортогонального проектирования было инициировано Карлом де Бором именно с целью получения результатов об операторе интерполирования. Интерполяционные сплайны (с произвольными узлами) широко используются как в теоретических исследованиях, так и при решении прикладных задач. Получение новых оценок для оператора ортогонального проектирования автоматически приводит к получению новых результатов об операторе интерполирования, - которые, в частности, позволяют оценить влияние погрешности в исходных данных на величину погрешности аппроксимации.

3. И, наконец, получение конструктивных оценок для констант Лебега важно с точки зрения практической реализации различных алгоритмов приближения сплайнами.

Полученный результат

Теорема 1. *Для констант Лебега $c_{k,k}$ непрерывных сплайнов справедлива следующая оценка*

$$\mu_k \le c_{k,k} \le A\mu_k,$$

где

$$\mu_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}\int_{-1}^{1}|l_k(t)|\,dt,$$

$$l_k(t) = \frac{1+t}{2} - \frac{2}{3}(1-t^2)\sum_{j=0}^{k-2}\frac{1}{h_j}\,C_j^{5/2}(t) =$$

$$= \frac{3}{k(k+1)(k+2)}(1+t)\left(C_{k-1}^{5/2}(t) - C_{k-2}^{5/2}(t)\right) = \frac{1}{2k}(1+t)P_{k-1}^{(1,2)}(t).$$

Здесь $C_k^\lambda(t)$ – многочлен Гегенбауэра порядка λ степени k, h_j – его скалярный квадрат, $P_k^{(\alpha,\beta)}(t)$ – многочлен Якоби с показателями (α,β) степени k. Относительно значения (не зависящей от k) константы A см. лемму 4.

Теорема 2. *Для констант Лебега $c_{k,k}$ непрерывных сплайнов справедливо*

$$c_{k,k} \sim \sqrt{k}.$$

Здесь знак ~ означает эквивалентность по порядку.

Отметим, что данный результат получен при помощи представления элементов пространства $\mathbb{S}_{k,k}(\Delta_n)$ непрерывных сплайнов в виде

$$s(x) = \sum_{l=0}^{n} z_l B_l(x) + \sum_{i=0}^{n-1}\chi_i(x)(x-x_{i+1})(x-x_i)\sum_{j=0}^{k-2}c_j^i C_j^{5/2}\left(\frac{2(x-x_i)}{x_{i+1}-x_i}-1\right),$$

где

$\left(B_l(x)\right)_{l=0}^n$ – базис *B*-сплайнов в пространстве линейных сплайнов на разбиении Δ_n,

$\chi_i(x)$ – характеристическая функция i-го частичного отрезка разбиения.

В доказательстве широко используется теория классических ортогональных полиномов. Ключевыми являются следующие леммы.

Лемма 1. *Масштабированием строк матрицу нормальных уравнений для определения коэффициентов $\left(z_l\right)_{l=0}^n$ можно привести к матрице с доминирующей главной диагональю и коэффициентом доминантности, равным* $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$.

Лемма 2. *Для коэффициентов* $\left(z_l\right)_{l=0}^{n}$ *справедлива следующая оценка*

$$\max_{l=0,\ldots,n}\left|z_l\right| \le \mu_k .$$

Лемма 3. *Для функции Лебега непрерывных сплайнов на частичном отрезке разбиения* $[x_i,x_{i+1}]$ *справедлива следующая оценка (после линейной замены переменной, переводящей отрезок* $[-1,1]$*)*

$$\sup_{\|f\|_\infty \le 1}\left|\left(P_{\mathbb{S}} f\right)(t)\right| \le \mu_k\left(\left|l(t)\right|+\left|l(-t)\right|\right)+\int_{-1}^{1}(1-t^2)(1-\tau^2)\left|\sum_{j=0}^{k-2}\frac{1}{h_j}\, C_j^{5/2}(t)C_j^{5/2}(\tau)\right| d\tau .$$

Лемма 4. *Существует константа* A *такая, что*

$$\mu_k\left(\left|l(t)\right|+\left|l(-t)\right|\right)+\int_{-1}^{1}(1-t^2)(1-\tau^2)\left|\sum_{j=0}^{k-2}\frac{1}{h_j}\, C_j^{5/2}(t)C_j^{5/2}(\tau)\right| d\tau \le A\mu_k .$$

В качестве константы A можно взять 2*. Для k*=2 *и* 3 *в качестве константы A можно взять* 1*.*

Численные эксперименты показывают, что значение A=1 подходит также для всех *k* от 4 до 30, в настоящий момент исследуется гипотеза, что значение A=1 подходит для всех $k \ge 1$.

Список литературы

1. De Boor C. J. Approx. Theory. 1968. V. 1. Pp. 452-263.

2. De Boor C. In: Approximation Theory (G.G. Lorentz, Ed.). N.-Y., Academic Press, 1973. Pp. 269-276.

3. De Boor C. Math. Comp. 1976. V. 30. Pp. 765-771.

4. De Boor C. Approximation and Function Spaces (Z. Ciesielsky, Ed.). Warzawa, PWN, 1981. Pp. 163-175.

5. Ciesielsky Z. Studia Mathematica. 1963. V. 23. Pp. 141-157.

6. Ciesielsky Z. Труды МИАН СССР. 1975. Т. 134. С. 366-369.

7. Oskolkov K.I. Approximation Theory (Z. Ciesielsky, Ed.). Banach Center Publications, V. 4. Warsaw, PWN, 1979. Pp. 177-183.

8. Shadrin A.Yu. IGPM Preprint 157. Technische Hochschule, Aachen, 1998.

9. Shadrin A.Yu. Acta Mathematica. 2001. V. 187. Pp. 59-137

10. Зматраков Н.Л., Субботин Ю.Н. Труды МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 75-99.

11. Освальд П. Мат. заметки. 1977. Т. 21. № 4. С. 495-502.